Matemática

Aula 12 – Probabilidade e Estatística

Mayra Boing

Nesta aula iremos aprender as noções básicas de probabilidade e estatística.

1 Probabilidade

A probabilidade permite obter o cálculo das ocorrências possíveis em um experimento aleatório. Basicamente, analisa as possibilidades reais de obter um determinado resultado em um experimento. Pode ser representada por fração, valores decimais ou por porcentagem. Além disso, como é a possibilidade de um determinado evento acontecer, não pode aparecer um valor menor que zero.

- Experimento aleatório e ponto amostral:

  Um experimento aleatório pode ser realizado repetidas vezes e, nas mesmas condições, darem resultados diferentes. São experimentos que não sabemos o resultado. Cada um desses resultados possíveis é um ponto amostral.

- Exemplos de experimentos aleatórios:

  \- Cara ou coroa:

  Lançar a moeda e observar o resultado é tido como um experimento aleatório. As possibilidades são as mesmas seja cara ou coroa, onde cada um deles é um ponto amostral.

  \- Lançamento de dados:

  Ao lançar um dado (não viciado) e observar a face superior, temos a possibilidade do resultado da face ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

  \- Retirar uma carta aleatória de um baralho:

  Ao retirar uma carta, todas elas têm as mesma chance de serem escolhidas.

- Cálculo da probabilidade:

  O cálculo de probabilidade é feito da seguinte forma:

$$P(A) = \frac{Casosfavoraveis}{Casospossiveis}$$

- Exemplo:

  Qual a probabilidade de tirar um número impar em um dado de 6 lados?

$$n\{Casosfavorveis\} = 3$$

$$n\{Casostotais\} = 6$$

Então,

$$P(A) = \frac{Casosfavoraveis}{Casospossiveis} = \frac{3}{6} = 0,5$$

2 Espaço amostral

O espaço amostral (Ω) é todo o universo/conjunto de resultados possíveis em um experimento aleatório. Ou seja, a soma de todos os pontos amostrais de um experimentos. Podem ser utilizadas as notações de conjuntos, assim como as operações entre conjuntos.

$$P(S) = 1$$

- Exemplos:

- O espaço amostral do experimento "Cara ou coroa"é o conjunto S = {Cara, Coroa} e n{S} = 2.

- O espaço amostral do experimento "Lançamento de dados"é o conjunto S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} e n{S} = 6.

3 Evento

Um evento é um conjunto de resultados ao qual associamos um valor de probabilidade e, em termos de conjuntos, é um subconjunto de S.

- Eventos independentes:

  Os eventos A,B,C,... são independentes quando a probabilidade de ocorrer um deles não depende do fato de os outros terem ou não ocorrido.

  A fórmula correspondente a probabilidade dos eventos independentes é:

$$P(AeBeCeD) = P(A).P(B).P(C).P(D)$$

- Exemplo:

  Uma urna tem 20 bolas, sendo 15 vermelhas e 5 azuis. Se sortearmos 2 bolas, 1 de cada vez e repondo a sorteada na urna, qual será a probabilidade de a primeira ser vermelha e a segunda ser azul?

  Como os eventos são independentes, a probabilidade de sair vermelha na primeira retirada e azul na segunda retirada é igual ao produto das probabilidades de cada condição, ou seja:

$$P(VeA) = P(V) \cdot P(A)$$

  Ora, a probabilidade de sair vermelha na primeira retirada é P(V) = $\frac{15}{20}$ e a de sair azul na segunda retirada P(A) = $\frac{5}{20}$. Daí, usando a regra do produto, temos:

$$P(VeA) = \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{20} = \frac{3}{16}$$

- Evento união $(A \cup B)$

  É quando você amplia o leque de possibilidades, unindo dois eventos e calculando uma nova probabilidade para essa união. Ou seja, se formos nos perguntar qual a possibilidade de, jogando uma moeda para cima, o resultado dar cara OU coroa? Se as chances de dar cara são P(C) = 50% e de dar coroa são outros P(K) = 50%, a possibilidade de dar cara OU coroa é P($C \cup K$)= 50% + 50% = 100%.Sendo assim, temos que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Evento intersecção $(A \cap B)$

  É quando você exige que dois eventos sejam simultâneos. É preciso que aconteça o primeiro e o segundo, juntos. Note que assim, as chances se reduzem, porque seu nível de exigência aumentou.

  Então, veja o seguinte exemplo: qual a possibilidade de, jogando duas moeda para cima, o resultado ser coroa em ambas? Nesse caso, você faz uma multiplicação para alcançar o resultado: $50\% \cdot 50\% = 25\%$.Sendo assim, temos que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A/B)$$

  E se os eventos são independentes, como é o caso da moeda, temos que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- Complemento (E'):

  O complementar de um evento A é tal que a união deles resulta no nosso espaço amostral (Ω). E sua intersecção resulta em um conjunto vazio.

$$(A \cup A') = \Omega$$

$$(A \cap A') = \varnothing$$

4 Resultados igualmente prováveis

Quando eventos elementares de um mesmo espaço amostral finito têm resultados igualmente prováveis significa que eles têm a mesma probabilidade de acontecer.

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$$

5 Probabilidade condicional

Probabilidade condicional refere-se as possibilidades de um acontecimento condicionado a outro.

- Fórmula da probabilidade condicional:

  Seja Ω um espaço amostral que contém os eventos A e B não vazios. A probabilidade de A acontecer, dado que B já aconteceu, é representada por P(A|B) e é calculada pela seguinte expressão:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Um exercício que pode nos ajudar a compreender esse conceito, é desenhar os conjuntos A e B, como temos abaixo:

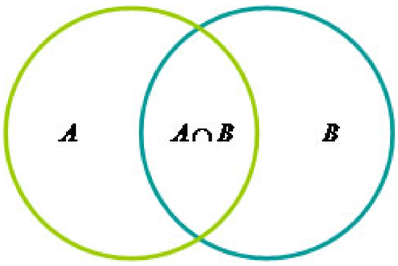

Figura 1: *Diagrama de Venn*

Assim, podemos ver que vamos considerar para P(A|B) apenas os elementos de A que resultam da união com B.

- Exemplo:

  A tabela abaixo resume as visitas à emergência de 4 hospitais em uma cidade. As pessoas podem sair sem atendimento (SA), serem admitidas no internação (AI) ou não (NI).

Tabela 1: *Hospitais*

Atendimentos	H1	H2	H3	H4	Total
SA	195	270	246	242	953
AI	1277	1553	666	984	4485
NI	3820	5163	4728	3103	16814
Total	5292	6991	5640	4329	22252

Sendo A = visitas no hospital 1 e B = visitas resultantes em SA, calcule $|A \cap B|$, $|A \cup B|$, $|A'|$, P(A), P(B), P(A') P$(A \cap B)$ e P$(A \cup B)$.

$$|A \cap B| = 195$$

$$|A \cup B| = 5592 + 953 - 195 = 6050$$

$$|A'| = 22252 - 5292 = 16960$$

Temos que:

$$P(A) = \frac{Casosfavoraveis}{Casospossiveis} = \frac{5292}{22252} = 0,238$$

$$P(B) = \frac{953}{22252} = 0,00428$$

$$P(A) = P(S) - P(A) = 1 - 0,238 = 0,762$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Como são eventos independentes:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,238 \cdot 0,00428 = 0,001$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 0,238 + 0,00428 - 0,001 = 0,241$$

- Exemplo:

  Calcule a probabilidade de obter soma 8 no lançamento de dois dados em que o resultado do lançamento foi dois números ímpares. Seja A = conjunto que obtém a soma 8 e B = conjunto que obter dois números ímpares. P$(A \cap B)$ é a probabilidade de se obter apenas números ímpares que somam 8 no lançamento de dois dados. As únicas combinações das 36 possíveis são:

$$(3,5),(5,3)$$

Portanto,

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

Já P(B) é a probabilidade de obter somente números ímpares no lançamento de dois dados. As únicas combinações dentro das 36 possíveis são:

$$(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)$$

Logo,

$$P(B) = \frac{9}{36}$$

Portanto,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{9}{36}}$$

$$P(A|B) = \frac{2}{9}$$

6 Estatística

Estatística estuda a coleta, registro, organização e análise dos dados de uma pesquisa. Assim, é trabalhado com dois conjuntos de dados: o universo e a amostra. Os principais conceitos e fundamentos são:

- População: conjunto de elementos, número de pessoas de uma cidade.

- Amostra: parte representativa de uma população.

- Variável: depende da abordagem da pesquisa, da pergunta que será feita.

- Exemplo:

  Qual sua marca de carro favorita? Ford, Volks, Fiat, Peugeot, Nissan são alguns exemplos de resposta.

- Frequência absoluta: valor exato, número de vezes que o valor da variável é citado.

- Exemplo:

  A tabela abaixo representa uma pesquisa de idade em um colégio:

Tabela 2: *Pesquisa*

Idade	Nº de alunos
11	30
12	34
13	36
14	68
15	42

  A frequência absoluta é dada através da quantidade de alunos por idade.

- Frequência relativa: valor representado através de porcentagem, divisão entre a frequência absoluta de cada variável e o somatório das frequências absolutas

- Exemplo:

  Em uma empresa foi realizada uma pesquisa a fim de saber a quantidade de filhos de cada funcionário. Os dados da pesquisa foram organizados na seguinte tabela:

Idade	Filhos	Freq. rel.	Porcentagem
0	30	30/160	18,75%
1	36	36/160	22,5%
2	60	60/160	37,5%
3	24	24/160	15%
4	10	10/160	6,25%
Total	160	1	100%

7 Representações gráficas de distribuição de frequências

- Histograma

  O histograma é uma representação gráfica de uma distribuição de frequência de um conjunto de dados. É construído elevando-se retângulos sobre os intervalos de classe, de tal forma que as áreas dos retângulos sejam proporcionais às frequências das classes. Consequentemente, a área total do histograma (igual a soma das áreas de todos os retângulos) será igual a 1. Assim, ao construir o histograma, cada retângulo deverá ter área proporcional à frequência relativa correspondente. No caso em que os intervalos são de tamanhos (amplitudes) iguais, as alturas dos retângulos serão iguais às frequências relativas (ou iguais às frequências absolutas) dos intervalos correspondentes.

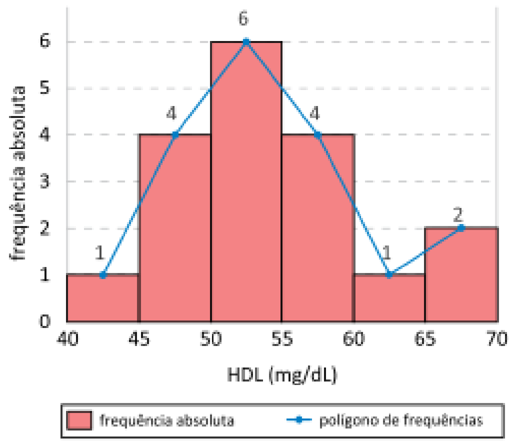

Figura 2: *Exemplo de histograma*

- Polígono de frequência

  Outro representação uma distribuição de frequências é o polígono de frequências. Obtém–se reunindo os pontos centrais das bases superiores dos retângulos de um histograma. As alturas dos pontos que estão ligados para formar o polígono representam as frequências das classes e não dos valores individuais.

- Gráfico de ogiva

  Uma distribuição cumulativa de frequências pode ser representada graficamente por uma ogiva. Para construir esse gráfico, representa-se os limites superiores das classes na abscissa e faz-se a altura dos pontos proporcionais à frequência

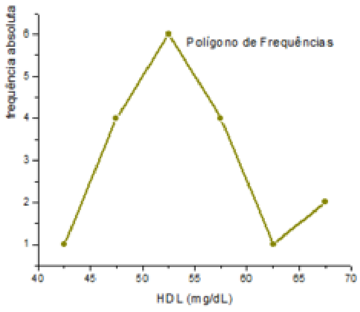

Figura 3: *Exemplo de polígono de frequência*

acumulada até esses limites. Estes pontos são então unidos por linhas retas.

- Exemplo:

  Considerando a tabela das notas dos alunos da turma A, à qual se acrescenta a frequência acumulada tem-se:

Notas	Turma	Freq. Acum.
3,0	3	3
4,0	5	8
5,0	6	14
6,0	9	23
7,0	4	27
8,0	2	29
9,0	2	31
Total	31	

Sendo o gráfico correspondente representado na Fig. 4:

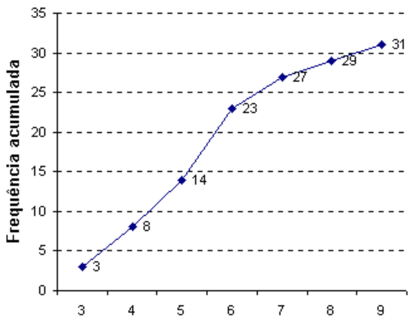

Figura 4: *Exemplo de gráfico de ogiva*

8 Medidas de tendência central

As medidas de tendência central mais utilizadas em estatística são:

- Média aritmética (M_e)

  A média aritmética de um conjunto de dados é obtida somando todos os valores e dividindo o valor encontrado pelo número de dados desse conjunto.

$$M_e = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

  Onde M_e é a média aritmética;
  $X_1, x_2, ..., x_n$ é os valores dos dados;
  n é o número de dados;

- Exemplo:

  Sabendo que as notas de um aluno foram: 8,2; 7,8; 10,0; 9,5; 6,7, qual a média que ele obteve no curso?

$$M_e = \frac{8,2 + 7,8 + 10 + 9,5 + 6,7}{5} = 8,4$$

- Mediana (M_d)

  A mediana analisa o conjunto e representa o número central. Para encontrar o valor da mediana é necessário colocar os valores em ordem crescente ou decrescente. De tal modo, se n é impar, o valor é central. Se n é par, o valor é a média dos dois valores centrais.

- Exemplo:

  Em uma escola, o professor de educação física anotou a altura de um grupo de alunos. Considerando que os valores medidos foram: 1,54 m; 1,67 m, 1,50 m; 1,65 m; 1,75 m; 1,69 m; 1,60 m; 1,55 m e 1,78 m, qual o valor da mediana das alturas dos alunos?

  Inicialmente, colocamos os valores de forma crescente: {1,50; 1,54; 1,55; 1,60; 1,65; 1,67; 1,69; 1,75; 1,78}

  Como o conjunto tem 9 elemento, o 5º elemento representa o valor central.

$$M_d = 1,65m$$

- Moda (M_o)

  A moda representa o valor que aparece com mais frequência no conjunto. Sendo assim, para defini-la basta observar a frequência com que os valores aparecem. Caso dois números ocorram na mesma frequência, o conjunto é bimodal.

- Exemplo: Em um dia foram vendidos os seguintes números de sapatos: 36, 36, 36, 36, 37, 38, 38, 39, 40, 40, 41. Qual é o valor da moda?

$$M_o = 36$$