CONJUNTOS, FATORAÇÕES, EXPONENCIAÇÃO E LOGARITMOS

Universidade Federal de Santa Catarina
Professor: Leopoldo Alfredo Sasse
Matéria: Matemática

CONJUNTOS

- Conjuntos são agrupamentos de elementos organizados sob determinada regra.

  Dado um conjunto A e um elemento x, somente existem duas possibilidades de relacionarmos o elemento x com o conjunto A: (i) ou x pertence (ou está) no conjunto A, o que denotamos por $x \in A$; (ii) ou x não pertence (ou não está) no conjunto A, o que denotamos por $x \notin A$.

  Podemos representar um conjunto listando seus elementos ou por darmos a propriedade que caracteriza o conjunto. Por exemplo, $A := \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit,\}$ ou $A := \{x \mid x \text{ é um naipe do baralho}\}$.

- União de Conjuntos: $A \cup B$ (lê-se A união com B)

  Dados os conjuntos A e B, a *união* entre A e B é o conjunto de todos os elementos que pertencem ao conjunto A ou que pertencem ao conjunto B.

  Se formos listar os elementos de $A \cup B$ e existirem elementos que pertençam aos dois conjuntos, tal elemento aparecerá uma única vez na representação.

- Intersecção de Conjuntos: $A \cap B$ (lê-se A intersecção com B)

  Dados os conjuntos A e B, a intersecção entre A e B é o conjunto dos elementos que pertencem ao conjunto A e pertencem ao conjunto B. Assim como em uma união de conjuntos, se ao listarmos os elementos de $A \cap B$ e existirem elementos que pertençam aos dois conjuntos, tal elemento aparecerá uma única vez na representação.

- Diferença entre conjuntos e complementar relativo.

  Dados os conjuntos A e B, a diferença entre A e B, $A-B$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B, ou seja $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

- Naturais: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$;

- Inteiros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$;

- Racionais $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}$, isto é, são os números que podem ser escritos na forma de fração. Quando representados na forma decimal, podemos obter um decimal finito $\left(\frac{1}{5} = 0{,}2\right)$ ou decimal periódico $\left(\frac{1}{3} = 0{,}333\,333\,333\dots\right)$;

- Irracionais: $\mathbb{Q}^c$, isto é, números que não são racionais, ou seja, não podem ser escritos como fração. Exemplos: $\pi, e, \sqrt{2}$. Possuem representação decimal infinita e não periódica;

- Reais: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$. Podem ser entendidos como conjunto de todos os pontos de um reta, que é chamada Reta Real. Se um número é racional, ele não pode ser irracional e vice-versa.

FATORAÇÕES

- Fator comum em evidência: $ax + bx = x.(a + b)$. Fatores comuns:

$$ax + ay + bx + by = (a + b) \cdot x + (a + b) \cdot y = (a + b) \cdot (x + y)$$

  Exemplos:

  $(5x + 2x + 5y + 2y) = (5 + 2).(x + y)$ e $(5x^2 + 2x) = x(5x + 2)$;

- Trinômio Quadrado Perfeito:
  - Soma: $a^2 + 2.a.b + b^2 = (a + b)^2$;
  - Diferença: $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

  Exemplos:

  $9x^2 + 30xy + 25y^2 = (3x + 5y)^2$ e $x^2 - 8x + 16 = (x - 4)^2$;

- Diferença de dois Quadrados: $a^2 - b^2 = (a + b).(a - b)$.

  Exemplo:

  $36x^2 - 81y^2 = (6x + 9y).(6x - 9y)$;

- Equação polinomial do Segundo Grau: $ax^2 + bx + c = 0$.

  Para encontrar as raízes dessa equação pode-se aplicar a Fórmula Geral (ou Fórmula de Bháskara):

  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  Neste caso temos duas raízes: x_1 e x_2 e então podemos escrever:

  $$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

EXPONENCIAÇÃO

- $a^0 = 1$, se $a \neq 0$, e $a^1 = a$ para qualquer número $a \in \mathbb{R}$. Exemplo: $237^0 = 1$;
- Se $a \in \mathbb{R}$ e $a < 0$ então $(-a)^n > 0$ se n par e $(-a)^n < 0$ se n for ímpar. (Lembre-se da regra dos sinais do produto). Exemplo: $(-2)^4 = 16$ e $(-2)^5 = -32$;
- $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ e $\left(\frac{a}{c}\right)^b = \frac{a^b}{c^b}$, em que $c \neq 0$. Exemplo: $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$;
- $a^b \cdot a^d = a^{b+d}$ e $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$, para $a \neq 0$.
- $(a^b)^c = a^{bc}$. Exemplo: $(x^2)^3 = x^6$.

RADICIAÇÃO

- $\sqrt[b]{a}$: a é radicando e b é radical. Ainda, $b \in \mathbb{N}$, porém, se b for par e $a < 0$ não existe raiz. Exemplos: $\sqrt[2]{-8} \notin \mathbb{R}$ e $\sqrt[3]{-8} = -2$;
- $\sqrt[b]{a^c} = a^{\frac{c}{b}}$. Exemplo: $\sqrt[8]{4^4} = 4^{\frac{4}{8}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = 2$; Exemplo: $\sqrt[2]{-8}$ e $\sqrt[3]{-8} = -2$;
- $(\sqrt[b]{a})^c = \sqrt[b]{a^c}$. Exemplo $(\sqrt[4]{64})^2 = \sqrt[4]{6a^2} = 8$;
- $\sqrt[b]{a} \cdot \sqrt[b]{d} = \sqrt[b]{ad}$ e $\dfrac{\sqrt[b]{a}}{\sqrt[b]{d}} = \sqrt[b]{\dfrac{a}{d}}$.

  Exemplos: $\sqrt[2]{32} = \sqrt[2]{2^5} = \sqrt[2]{2.2^4} = 2^2.\sqrt[2]{2} = 4\sqrt[2]{2}$ e $\frac{(\sqrt[3]{5}).(\sqrt[3]{18})}{(\sqrt[3]{6})} = \sqrt[3]{15}$;
- $\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[b.c]{a}$. Exemplo: $\sqrt[3]{\sqrt[2]{7}} = \sqrt[3.2]{7} = \sqrt[6]{7}$;
- Exemplo de Racionalização de Denominador:

$$\frac{3}{\sqrt[2]{5}} = \frac{3}{\sqrt[2]{5}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt[2]{5}}{\sqrt[2]{5}}}_{=1} = \frac{3\sqrt[2]{5}}{\sqrt[2]{5^2}} = \frac{3\sqrt[2]{5}}{5}$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{5}} = \frac{3}{\sqrt[3]{5}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}}_{=1} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{5}$$

LOGARITMOS

- **Definição:** $\log_b(a) = c \iff b^c = a$, em que a é o logaritmando, b é a base do logaritmo e c é o logaritmo. Isto significa que log é a operação inversa da exponenciação. Logaritmo é uma função injetora.
- Observação: $0 < b \neq 1$, $a \neq 0$.
- $\log_b(1) = 0$ e $\log_a(a) = 1$.

  Exemplos: $\log_5(1) = 0$, pois $5^0 = 1$; $\log_5(5) = 1$, pois $5^1 = 5$;
- $b^{\log_b(a)} = a$.

  Exemplo: $2^{\log_2(8)} = 8$, veja que $\log_2(8) = 3$ assim $2^{\log_2(8)} = 2^3 = 8$;
- $\log_b(a) = \log_b(d) \Leftrightarrow a = d$. Exemplo $\log_2(a) = \log_2(d) \Leftrightarrow a = d$;
- $\log_b(a \cdot d) = \log_b(a) + \log_b(d)$.

  Exemplo: $\log_{10}(6) = \log_{10}(2.3) = \log_{10}(2) + \log_{10}(3)$;
- $\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b(a) - \log_b(d)$.

  Exemplo: $\log_{10}(1.5) = \log_{10}(\frac{3}{2}) = \log_{10}(3) - \log_{10}(2)$;
- $\log_b(a) = \dfrac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$ (mudança de base).
- $\log_b(a^c) = c \cdot \log_b(a)$.

  Exemplo: $\log_{10}(2^3) = 3 \cdot \log_{10}(2)$.